משואות דיפרנציאליות רגילות מועד א' (104131)

- משך הבחינה שלוש שעות.
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש להשתמש בעט כחול או שחור בלבד. אין להשתמש בעפרון!
- אין להפריד את דף השער מדפי הבחינה.
- סך הנקודות במבחן הוא 100.
- הבחינה כוללת 8 שאלות .
- בשאלות הפתוחות (שאלות 1-3) יש לתת פתרון מלא, מנומק ומפורט, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.
- בשאלות האמריקאיות (שאלות 4-8) אין לרשום נימוקים. יש לסמן תשובה אחת בלבד, תשובה שגויה ובכלל זה סימון של יותר מתשובה אחת יגרור קבלת ניקוד 0.
- יש לענות על הבחינה: **בטופס שאלון הבחינה בלבד. המחברות לא ייבדקו.**

בהצלחה!

שאלות הפתוחות

<u>יש לתת פתרון מלא, מפורט ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.</u>

שאלה 1 (20%)

נתונה משפחת העקומים: $y = C(x-2)e^x$

א. (15%) מצאו עקומי המשפחה האורתוגונלית

ב. (5%) מצאו העקום מן המשפחה האורתוגונלית אשר עובר בנקודה $(2,4)$.

פתרון

$$,C = \frac{y}{e^x(x-2)}$$

$$,y' = C(e^x + (x-2)e^x) \Rightarrow y' = \frac{y}{e^x(x-2)}(e^x + (x-2)e^x) = y\frac{x-1}{x-2}$$

$$,y'_\perp = -\frac{1}{y'} = -\frac{x-2}{y(x-1)}$$

$$ydy = -\frac{x-2}{x-1}dx \Rightarrow \int ydy = -\int \frac{x-2}{x-1}dx = -\int\left(1-\frac{1}{x-1}\right)dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x-1| - x + C$$

משפחה אורתוגונלית מוגדרת ע"י משוואה: $\frac{y^2}{2} = \ln|x-1| - x + C$ או $y^2 = 2\ln|x-1| - 2x + C$

נחפש העקום מן המשפחה האורתוגונלית אשר עובר בנקודה $(2,4)$.

$$16 = 2\ln 1 - 4 + C \Rightarrow C = 20$$

אז העקום מן המשפחה האורתוגונלית אשר עובר בנקודה $(2,4)$ הוא: $y = \sqrt{2\ln|x-1| - 2x + 20}$

שאלה 2 (20%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $x(4-x)^2 y'' = 8y,\ x>4$, ונתון שהפונקציה $y_1(x) = \dfrac{x}{4-x}$

פתרון של המשוואה.

(5%) מצאו הוורונסקיאן של פתרונות המשוואה

(15%) מצאו פתרון כללי של המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה

פתרון:

המשוואה $y'' - \dfrac{8}{x(4-x)^2} y = 0,\ x>4$ מקיימת משפט קיום ויחידות,

אזי הוורונסקיאן של פתרונות המשוואה בנקודה כללית x לפי נוסחת אבל שווה:

$$W(y_1, y_2)(x) = Ce^{\int 0dx} = C$$

ו- $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{W(y_1,y_2)(x)}{y_1^2} \Leftarrow \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{\left(\dfrac{x}{4-x}\right)^2} = C\dfrac{(4-x)^2}{x^2} = C\left(\dfrac{16}{x^2} - \dfrac{8}{x} + 1\right)$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int C\left(\frac{16}{x^2} - \frac{8}{x} + 1\right)dx = C\left(-\frac{16}{x} - 8\ln x + x\right) = C\left(\frac{16}{x} + 8\ln x - x\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = C\left(\frac{16}{x} + 8\ln x - x\right)\cdot\frac{x}{4-x}$$

פתרון כללי של המשוואה הדיפרנציאלית הוא:

$$y = C_1\frac{x}{4-x} + C_2\left(\frac{16}{x} + 8\ln x - x\right)\cdot\frac{x}{4-x}$$

שאלה 3 (20%)

נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$.

א.(15%) מצאו פתרון כללי של המערכת.

ב.(5%) מצאו את הפתרון של מערכת המשוואות, המקים את תנאי ההתחלה: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

פתרון

1. (ע"ע):

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2 = 0 \text{ , לכן } \begin{matrix} \lambda_{1,2} = 5 \\ \lambda_{3,4} = 2 \end{matrix} .$$

2. ריבוי גיאומטרי של ע"ע

$$k_1 = 4 - rank \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = 4 - rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$k_2 = 4 - rank \begin{pmatrix} 5-2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5-2 \end{pmatrix} = 4 - rank \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

מטריצה לכסינה

ו"ע

ל- $\lambda_1 = 5$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$,

$$,\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\Leftarrow\vec{v}=m\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}v_1=m\\v_2=-2v_1=-2m\\v_3=-3v_4=-3n\\v_4=n\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}-6v_1-3v_2=0\\-3v_3-9v_4=0\end{cases}$$

ל- $\lambda_2=2$: $\begin{pmatrix}3&0&0&0\\-6&0&0&0\\0&0&0&-9\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=0$,

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\vec{v}=m\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}v_1=0\\v_2=m\\v_3=n\\v_4=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}3v_1=0\\3v_4=0\end{cases}$$

פתרון כללי: $\vec{x}=C_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_4e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$

הפתרון של מערכת המשוואות, המקים את תנאי ההתחלה הנתון:

$$,\begin{cases}C_1=1\\C_2=0\\C_3=2\\C_4=-1\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}C_1=1\\-2C_1+C_3=0\\-3C_2+C_4=-1\\C_2=0\end{cases},C_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

הפתרון של מערכת המשוואות, המקים את תנאי ההתחלה הנתון הוא:

$$\vec{x}_p=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}-e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

שאלות האמריקאיות

<u>אין לרשום נימוקים. יש לסמן תשובה אחת בלבד, תשובה שגויה ובכלל זה סימון של יותר מתשובה אחת יגרור קבלת ניקוד 0.</u>

שאלה 4 (8%) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y''+(\cos x)y=0$. אזי חמשת האיברים הראשונים בפיתוח לטור חזקות סביב $x_0=0$ של פתרון המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=0, y'(0)=1$ הם:

א. $y(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$

ב. $y(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4$

ג. $y(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^4$

ד. $y(x)=x-\frac{1}{6}x^3$

ה. $y(x)=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4$

פתרון

נציב תנאי ההתחלה במשוואה הנתונה: $a_2=0 \Leftarrow y''(0)=0 \Leftarrow y''(0)+(\cos 0)0=0$

נגזור המשוואה הנתונה: $y'''-(\sin x)y+(\cos x)y'=0$

נציב תנאי ההתחלה:

$$a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=-\frac{1}{6} \Leftarrow y'''(0)=-1 \Leftarrow y'''(0)-(\sin 0)0+(\cos 0)1=0$$

נגזור עוד פעם: $y^{(4)}-(\cos x)y-2(\sin x)y'+(\cos x)y''=0$

נציב תנאי ההתחלה: $a_4=0 \Leftarrow y^{(4)}(0)=1 \Leftarrow y^{(4)}(0)-(\cos 0)0-2(\sin 0)1+(\cos 0)(0)=0$

אזי חמשת האיברים הראשונים:

$$y(x)=x-\frac{1}{6}x^3$$

שאלה 5 (8%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y''-2y'+y=f(t)$ כאשר $f(t)=\begin{cases}-e^t, & 0\le t<1\\ e^t, & 1\le t\end{cases}$.

אז למשוואה יש פתרון פרטי המקיים את תנאי ההתחלה: $y(0)=0,\ y'(0)=0$:

א. $y_{pr}=\frac{e}{2}te^t+u_1(t)$

ב. $y_{pr}=\frac{e}{2}(t-1)^2e^{t-1}u_1(t)$

ג. $y_{pr}=t+e^{t-1}u_1(t)$

ד. $y_{pr}=-\frac{1}{2}t^2e^t+e^t(t-1)^2u_1(t)$

ה. $y_{pr}=-\frac{1}{2}e^t+(t-1)e^tu_1(t)$

פתרון

נמצא באמצעות התמרת לפלס פתרון למשוואה

$f(t)=-e^t+2e^tu_1(t)=-e^t+2e\cdot e^{t-1}u_1(t)$, $L[f(t)](s)=L\left[e\cdot e^{t-1}u_1(t)\right](s)=e\frac{e^{-s}}{s-1}$.

$L\left[y''-2y'+y\right](s)=s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=Y(s)\left(s^2-2s+1\right)=Y(s)\left(s-1\right)^2$.

$Y(s)=e\frac{e^{-s}}{\left(s-1\right)^3}\Leftarrow Y(s)\left(s-1\right)^2=-\frac{1}{s-1}+2e\frac{e^{-s}}{s-1}$.

$$y_{pr}(t)=L^{-1}\left[-\frac{1}{\left(s-1\right)^3}+2e\frac{e^{-s}}{\left(s-1\right)^3}\right]=eL^{-1}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{\left(s-1\right)^{2+1}}+\frac{2}{2}\cdot\frac{2!}{\left(s-1\right)^{2+1}}e^{-s}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}t^2e^t+e(t-1)^2e^{t-1}u_1(t)=-\frac{1}{2}t^2e^t+(t-1)^2e^tu_1(t)$$

שאלה 6 (8%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $(x^2+2y^2+2x)dx+(4y)dy$. למשוואה הנתונה יש גורם אינטגרציה:

א. $\mu(x)=x$

ב. $\mu(x)=e^x$

ג. $\mu(y)=y$

ד. $\mu(y)=e^y$

ה. לא קיים גורם אינטגרציה שתלוי ב- x או ב- y

פתרון

$$P'_y=(x^2+2y^2+2x)'_y=4y,\ Q'_x=(4y)'_x=0$$

$\frac{P'_y-Q'_x}{P}=\frac{4y}{x^2+2y^2+2x}\neq f(y)$, אז לא קיים גורם אינטגרציה לפי- y

$\frac{P'_y-Q'_x}{Q}=\frac{4y}{4y}=1=\varphi(x)$, אז קיים גורם אינטגרציה לפי- x

$$\frac{\mu'_x}{\mu}=1\Rightarrow \ln\mu=x\Rightarrow \mu=e^x$$

שאלה 7 (8%)

נתונה משוואה $y'=\left(y^2-4\right)e^{1-x-y}$, אז הפתרון $y(x)$ המקיים $y(0)=-1$ הוא

א. חסום ומונוטוני עולה

ב. חסום מלמטה ומונוטוני עולה

ג. חסום מלמעלה ומונוטוני יורד

ד. חסום ומונוטוני יורד

ה. איננו חסום

פתרון

$y=\pm 2$ פתרונות של המשוואה. נקודת ההתחלה נמצאת בין שני פתרונות $y=\pm 2$. המשוואה מקיימת משפט קיום ויחידות: $f(x,y)=\left(y^2-4\right)e^{1-x-y}$ פונקציה רציפה לכל x,y, אז רציפה סביב נקודה $(0,-1)$ ו- $f'_y(x,y)=2ye^{1-x-y}-\left(y^2-4\right)e^{1-x-y}$ פונקציה רציפה לכל x,y אז רציפה סביב נקודה $(0,-1)$. למשוואה קיים פתרון אחד ויחיד שעובר דרך כל נקודה במישור xy.

מכן מקבלים שהפתרון $y(x)$ המקיים $y(0)=-1$ הוא חסום: $-2<y(x)<2$ ויורד כי

$$y'(x)<0 \quad \left(\left(y^2-4\right)<0,\ e^{1-x-y}>0\right)$$

שאלה 8 (8%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $y''-6y'+34y=7e^{3x}\sin(5x)$. אז למשוואה יש פתרון פרטי מהצורה:

א. $y_{pr}=x(A\cos(5x)+B\sin(5x))$

ב. $y_{pr}=xe^{3x}(A\cos(5x)+B\sin(5x))$

ג. $y_{pr}=e^{3x}(A\cos(5x)+B\sin(5x))$

ד. $y_{pr}=e^{3x}(A_0+A_1x)$

ה. $y_{pr}=(A_0x+A_1x^2)e^{3x}$

פתרון

נפתור משוואה הומוגנית: $y''+y=0$, $k_{1,2}=3\pm 5i \Leftarrow k^2-6k+34=0$

$$f(x)=7e^{3x}\sin(5x)\Rightarrow \alpha=3,\ \beta=5\Rightarrow s=3+5i$$

אז s מופיע בתוך שורשים של פ"א. צורה של פתרון פרטי היא:

$$y_{pr}=xe^{3x}(A\cos(5x)+B\sin(5x))$$